

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Г. Ф. МОРОЗОВА»**

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению расчетно-графических работ
для студентов по направлению подготовки
23.03.01 – Технология транспортных процессов
Форма обучения - заочная

Воронеж 2021

УДК 517.9

Веневитина, С.С. Математика [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов по направлению подготовки 23.03.01 – Технология транспортных процессов / С.С. Веневитина, В.В. Зенина, И.В. Сапронов; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ». – Воронеж, 2021. – 49 с.

Одобрено решением учебно-методического совета ФГБОУ ВО «ВГЛТУ»

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Воронежского государственного педагогического университета В.В. Обуховский

Методические указания к выполнению расчетно-графических работ по дисциплине «Математика» предназначены для студентов ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет», обучающихся по направлению подготовки 23.03.01 – «Технология транспортных процессов» (форма обучения - заочная).

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров, в каждом из которых необходимо выполнить одну РГР.

Предложены несколько вариантов расчетно-графических работ по каждому из разделов «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Теория вероятностей».

В целях качественного выполнения студентами расчетно-графических работ даны необходимые рекомендации и образцы выполнения этих работ. Они будут особенно полезны при самостоятельном изучении дисциплины «Математика». **Студенты решают вариант, который соответствует последней цифре зачетной книжки.**

Материалы данной учебно-методической разработки по содержанию, форме изложения и объёму соответствуют задачам дисциплины и требованиям стандарта соответствующего направления подготовки.

Оглавление

1. РГР № 1 «Полное исследование функции и построение ее графика».....	4
1.1. Теоретический материал.....	4
1.2. Варианты РГР.....	7
1.3. Образец решения РГР.....	7
2. РГР № 2 «Определенный интеграл и его приложения».....	14
2.1. Теоретический материал.....	14
2.2. Варианты РГР.....	16
2.3. Образец решения РГР.....	21
3. РГР № 3 «Случайные величины и их числовые характеристики».....	28
3.1. Теоретический материал.....	28
3.2. Варианты РГР.....	32
3.3. Образец решения РГР.....	41
Библиографический список.....	49

1. РГР №1 «Полное исследование функции и построение ее графика»

1.1. Теоретический материал.

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$; $C = const$;
4. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u'$, $C = const$;
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;
6. $\left(\frac{C}{v}\right)' = C \cdot (v^{-1})' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$, $C = const$.

Производная сложной функции

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x , которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Производные основных элементарных функций (таблица производных)

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$7. (\sin x)' = \cos x;$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется **производной первого порядка**.

Если функция $y' = f'(x)$ дифференцируема, то ее производная $(y')' = (f'(x))'$ называется **производной второго порядка** и обозначается y'' или $f''(x)$.

Производная от производной второго порядка $(y'')' = (f''(x))'$ называется **производной третьего порядка** и обозначается y''' или $f'''(x)$.

Производной n -го порядка (или n -й производной) называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Применение производной к исследованию функций

Необходимые условия возрастания (убывания) функции:

Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$ ($f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$).

Достаточные условия возрастания (убывания) функции:

Если функция $f(x)$ дифференцируемая на интервале (a,b) и $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, то эта функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b) .

Если функция $f(x)$ дифференцируемая на интервале (a,b) и $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, то эта функция $f(x)$ убывает на интервале (a,b) .

Необходимые условия существования экстремума функции:

Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования экстремума функции:

Если непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума.

Если знак меняется с плюса на минус, то x_0 – точка максимума.

Если знак меняется с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции:

Если функция $f(x)$ во всех точках интервала (a,b) имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, то ее график – выпуклый (выпуклый вверх) на интервале (a,b) .

Если функция $f(x)$ во всех точках интервала (a,b) имеет положительную вторую производную, то есть $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, то ее график – вогнутый (выпуклый вниз) на интервале (a,b) .

Достаточные условия существования точек перегиба:

Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 (в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует), то точка графика с абсциссой x_0 – точка перегиба.

1.2. Варианты Расчетно-графической работы по теме «Полное исследование функции и построение ее графика»

Задание: Исследовать методами дифференциального исчисления функции и на основании результатов исследований построить их графики.

Вариант 0	a) $y = 3x - x^3$;	б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$;
Вариант 1	a) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$;	б) $y = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$;
Вариант 2	a) $y = \frac{1}{8}(x^3 + 12x^2 + 36x)$;	б) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$;
Вариант 3	a) $y = 3x^2 - x^3$;	б) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$;
Вариант 4	a) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$;	б) $y = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2$;
Вариант 5	a) $y = \frac{1}{6}(2x^3 + 21x^2 + 60x)$;	б) $y = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2$;
Вариант 6	a) $y = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2)$;	б) $y = \frac{x^3}{6 - 2x^2}$;
Вариант 7	a) $y = \frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 + 9x - 54)$;	б) $y = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$;
Вариант 8	a) $y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2)$;	б) $y = \frac{x^2 - x + 4}{2x}$;
Вариант 9	a) $y = \frac{1}{6}(2x^3 - 21x^2 + 60x)$;	б) $y = \frac{x^2 + x + \frac{3}{2}}{2x - 1}$;

1.3. Образец выполнения РГР.

a) $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Проведем исследование функции по следующей схеме:

1. Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Вид функции. Выясним, является ли функция четной или нечетной.

Если $y(-x) = y(x)$ для любого x из области определения функции $y = f(x)$, то эта функция называется четной. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Если $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции $y = f(x)$, то эта функция называется нечетной. График нечетной функции симметричен относительно начала системы координат.

Для нашей функции:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 2, \\ y(-x) &= -x^3 + 2x^2 - x + 2, \\ -y(x) &= -x^3 - 2x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

Равенства $y(-x) = y(x)$ и $y(-x) = -y(x)$ нарушены, например, при $x = 1$ ($y(1) = 6$, $y(-1) = 2$, $-y(1) = -6$), поэтому функция не является четной и не является нечетной.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Выясним, пересекается ли график функции с осью Ox , и найдем координаты точек пересечения, если эти точки имеются. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = x^3 + 2x^2 + x + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ (x+2)(x^2+1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x+2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

Итак, $(-2; 0)$ - точка пересечения графика функции с осью Ox .

Так как $0 \in D(y)$, то график пересекается с осью Oy . Для нахождения координат точки пересечения решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x^3 + 2x^2 + x + 2. \end{cases}$$

Отсюда $(0; 2)$ - точка пересечения графика с осью Oy .

4. Исследование функции по 1-й производной (интервалы монотонности, точки экстремума).

Найдем 1-ю производную функции:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + x + 2)' = 3x^2 + 4x + 1.$$

$y' = 0$ при $x = -1$ и при $x = -\frac{1}{3}$. Точек, в которых y' не существует, нет. Точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$ разбивают числовую ось на три интервала $(-\infty; -1)$, $(-1; -\frac{1}{3})$,

$(-\frac{1}{3}; +\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из них. Возьмем любое число из интервала $(-\infty; -1)$, например -2 . $y'(-2) = 5 > 0$, поэтому на всем интервале $(-\infty; -1)$ производная $y' > 0$ и, следовательно, функция $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$ монотонно возрастает.

Аналогично определяем знак производной y' на двух других интервалах: $y'(\frac{-2}{3}) = -\frac{1}{3} < 0, y'(0) = 1 > 0$.

Результаты исследования занесем в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	2	\searrow	$1\frac{23}{27}$	\nearrow
y	функция возрастает	max	функция убывает	min	функция возрастает

Итак, функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; -1)$, $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; -\frac{1}{3})$. В точке $x_1 = -1$ производная меняет знак с "+" на "-", следовательно $x_1 = -1$ – точка максимума функции. Значение функции в этой точке $y_{\max}(-1) = 2$.

В точке $x_2 = -\frac{1}{3}$ производная меняет знак с "-" на "+", следовательно $x_2 = -\frac{1}{3}$ – точка минимума функции. Значение функции в этой точке $y_{\min}(-\frac{1}{3}) = 1\frac{23}{27}$.

5. Исследование функции по 2-й производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика).

Найдем 2-ю производную функции:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 1)' = 6x + 4.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{2}{3}$. Точек, в которых y'' не существует, нет. Точка $x = -\frac{2}{3}$ разбивает числовую ось на два интервала $(-\infty; -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}; +\infty)$. Определим знак производной y'' на каждом из них. $y''(-1) = -2 < 0$, поэтому на всем интервале $(-\infty; -\frac{2}{3})$ производная $y'' > 0$ и, следовательно, график функции является выпуклым на данном интервале. Аналогично определяем, что $y'' < 0$ на интервале $(-\frac{2}{3}; +\infty)$, поэтому график вогнут на данном интервале. Результаты исследования занесем в таблицу.

x	$(-\infty; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	\frown	$1\frac{25}{27}$	\smile
	выпуклый график	перегиб графика	вогнутый график

В точке $x = -\frac{2}{3}$ производная y'' меняет знак, следовательно, точка графика с координатами $x = -\frac{2}{3}$, $y = y(-\frac{2}{3}) = 1\frac{25}{27}$ является точкой перегиба графика.

6. Точки разрыва функции и вертикальные асимптоты ее графика.

Функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому ее график не имеет вертикальных (то есть параллельных оси Oy) асимптот.

7. Невертикальные асимптоты графика функции.

Невертикальной будем называть асимптоту, не параллельную оси Oy . Выясним, имеет ли график функции невертикальную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$. Невертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Эта асимптота имеет уравнение $y = kx + b$. Но

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x}) = +\infty,$$

поэтому график функции не имеет невертикальной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$. Аналогично убеждаемся в том, что график не имеет невертикальной асимптоты при $x \rightarrow -\infty$.

8. Построение графика функции.

На основании результатов исследования строим график функции.

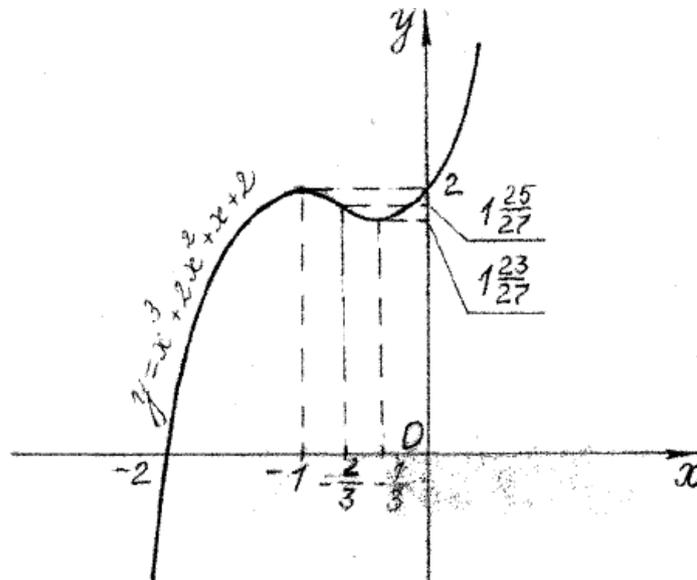


Рис.1

Заметим, что для более точного построения графика можно найти координаты еще нескольких точек графика. Например:

x	-3	$\frac{3}{2}$	1
y	-10	$1\frac{5}{8}$	6

9. Множество значений функции.

Вид графика функции (рис. 1) позволяет сделать вывод: множеством значений функции является множество всех действительных чисел.

$$б) y = \frac{x^3}{3(4-x^2)}.$$

1. Область определения функции. В область определения не входят лишь те значения x , для которых $4-x^2=0$, то есть $x=-2$, $x=2$. Поэтому $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Вид функции.

$$y(x) = \frac{x^3}{3(4-x^2)}, \quad y(-x) = -\frac{x^3}{3(4-x^2)}, \quad -y(x) = -\frac{x^3}{3(4-x^2)}.$$

Видим, что $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции. Поэтому функция нечетная, ее график симметричен относительно начала системы координат.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Для нахождения точек пересечения графика функции с осью Ox решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \frac{x^3}{3(4-x^2)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x=0, y=0$, следовательно точка $O(0; 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Ox .

Для нахождения точки пересечения графика с осью Oy решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{x^3}{3(4-x^2)}. \end{cases}$$

Отсюда $x=0, y=0$, поэтому точка $O(0; 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Oy .

4. Исследование функции по 1-й производной (интервалы монотонности, точки экстремума).

Найдем 1-ю производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3(4-x^2)}\right)' = \frac{(x^3)'(4-x^2) - x^3(4-x^2)'}{3(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{3(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{3(4-x^2)^2}.$$

$y' = 0$ при $x=0, x=-2\sqrt{3}, x=2\sqrt{3}$, y' не существует при $x=-2, x=2$. Точки $x_1 = -2\sqrt{3}, x_2 = -2, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 2\sqrt{3}$ разбивают числовую ось на шесть интервалов.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$
y'	-	0	+	+	0	+	+	0	-
y	\searrow	$\sqrt{3}$	\nearrow	\nearrow	0	\nearrow	\nearrow	$-\sqrt{3}$	\searrow
y	убыв.	min	возр.	возр.		возр.	возр.	max	убыв.

Вывод: функция возрастает на каждом из интервалов $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 2\sqrt{3})$; функция убывает на каждом из интервалов $(-\infty; -2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}; +\infty)$; $x_1 = -2\sqrt{3}$ – точка минимума функции, $y_{\min}(-2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $x_5 = 2\sqrt{3}$ – точка максимума функции, $y_{\max}(2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

5. Исследование функции по 2-й производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика).

Найдем 2-ю производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \left(\frac{x^2(12-x^2)}{3(4-x^2)^2} \right)' = \left(\frac{12x^2-x^4}{3(4-x^2)^2} \right)' = \\ &= \frac{(12x^2-x^4)'(4-x^2)^2 - (12x^2-x^4) \cdot ((4-x^2)^2)'}{3(4-x^2)^4} = \\ &= \frac{(24x-4x^3)(4-x^2)^2 + (12x^2-x^4)(4-x^2)4x}{3(4-x^2)^4} = \frac{8x(12+x^2)}{3(4-x^2)^3}. \end{aligned}$$

$y'' = 0$ при $x = 0$, y'' не существует при $x = -2$, $x = 2$. Точки $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$ разбивают числовую ось на четыре интервала. Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
y''	+	-	0	+	-
y	\smile	\frown	0	\smile	\frown
	вогнутый график	выпуклый график	перегиб графика	вогнутый график	выпуклый график

Вывод: график функции является выпуклым на каждом из интервалов $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; график функции является вогнутым на каждом из интервалов $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$; $O(0; 0)$ – точка перегиба графика.

6. Точки разрыва функции и вертикальные асимптоты ее графика.

Точки разрыва функции – это точки $x_2 = -2$ и $x_4 = 2$, в которых функция не определена. Вычислим пределы функции в точке $x_2 = -2$ слева и справа:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^3}{3(4-x^2)} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^3}{3(4-x^2)} = -\infty.$$

Поэтому прямая с уравнением $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Аналогично, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{3(4-x^2)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{3(4-x^2)} = -\infty,$$

то прямая с уравнением $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

7. Невертикальные асимптоты графика функции.

Вычислим пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x(4-x^2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2} - 1} = -\frac{1}{3} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{3(4-x^2)} + \frac{x}{3} \right] = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{4-x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2} - 1} = 0 = b.$$

Так как оба предела k, b конечны, то график функции имеет невертикальную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$. Ее уравнение $y = kx + b$, т.е. $y = -\frac{1}{3}x$.

Аналогично устанавливаем, что прямая $y = -\frac{1}{3}x$ является невертикальной асимптотой при $x \rightarrow -\infty$.

8. Построение графика функции.

На основании результатов исследования строим график функции. Нечетность функции облегчает построение графика: строим часть графика функции для значений $x \in [0, 2) \cup (2; +\infty)$, а затем отображаем эту часть графика симметрично относительно начала системы координат и получаем весь график.

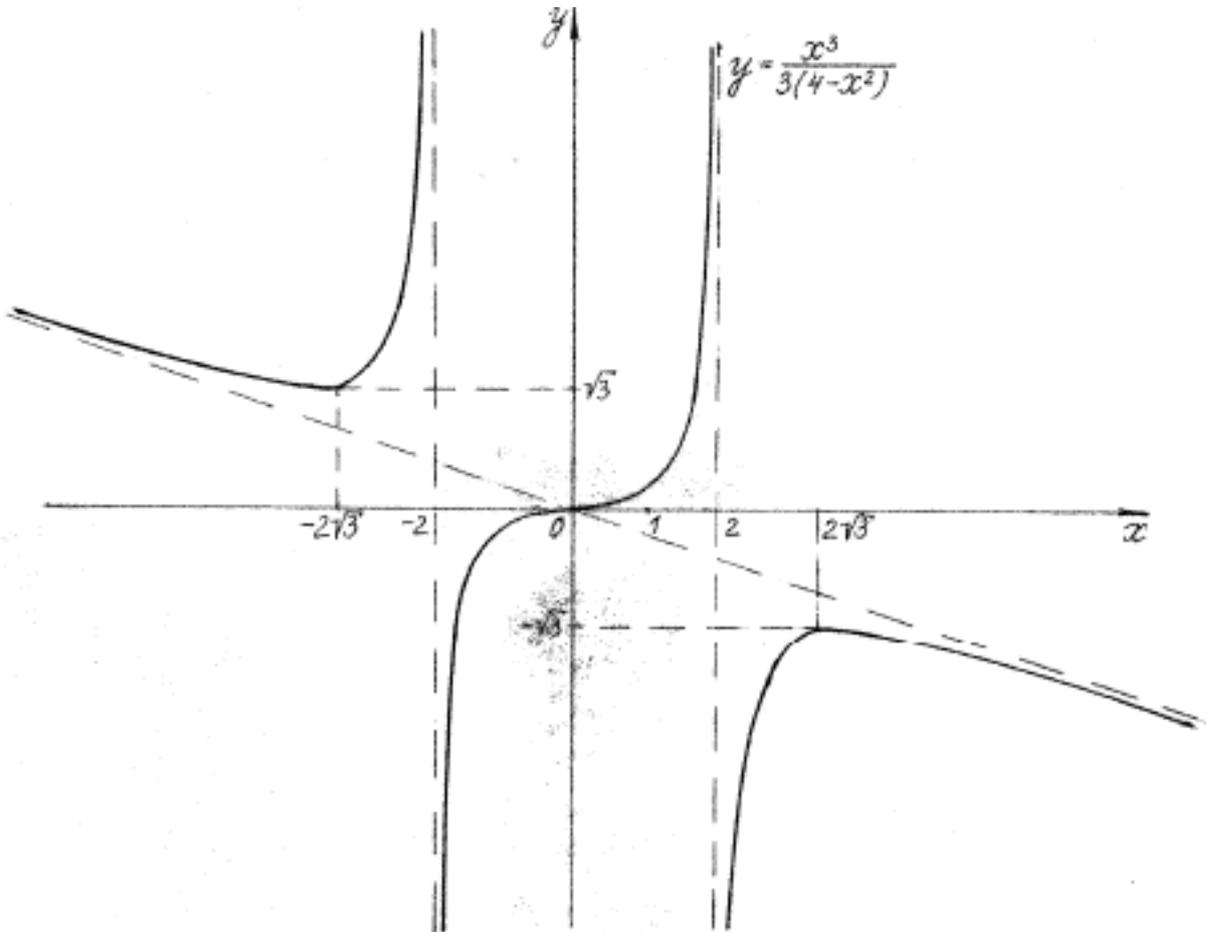


Рис. 2

9. Множество значений функции.

Вид графика функции (рис. 2) позволяет сделать вывод: множеством значений функции является множество всех действительных чисел.

$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

2. РГР № 2 «Определённый интеграл и его приложения»

2.1. Теоретический материал

Таблица основных неопределённых интегралов

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1); \quad \int dx = x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Основные правила интегрирования

1. $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx .$
2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$
3. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C .$$
4. $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C .$
5. $\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C .$
6. Интегрирование по частям: $\int u dv = uv - \int v du .$
7. Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Приложения определенного интеграла

1. Площадь фигуры, изображённой на рис.1, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx .$$

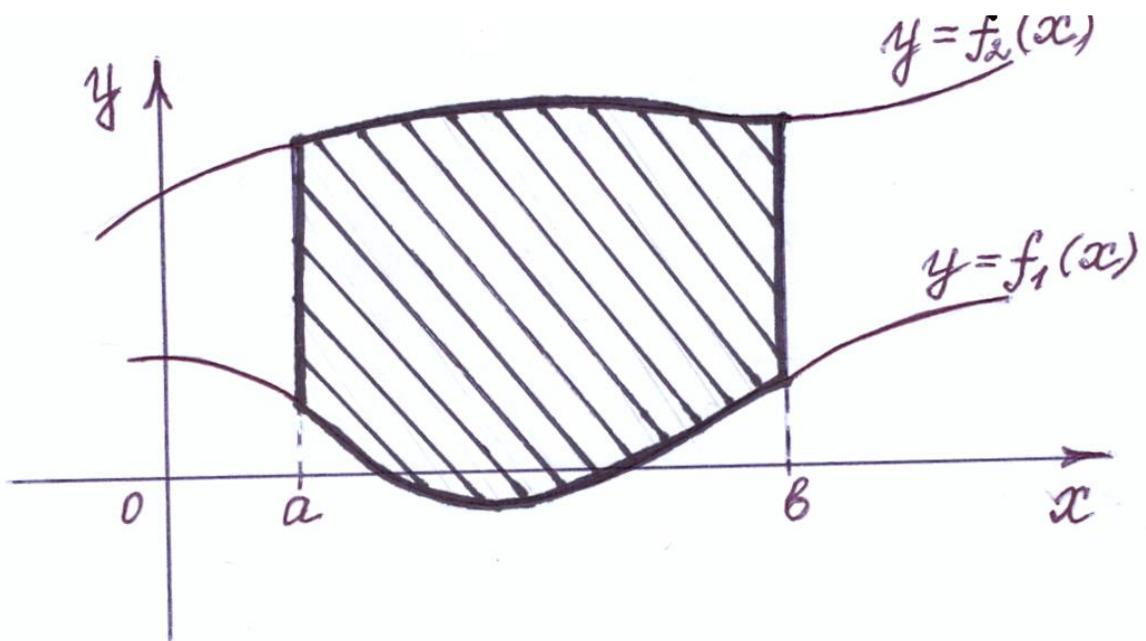


Рис.1.

2. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

3. Формулы для вычисления объёма тела вращения

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx \text{ – вокруг оси } Ox;$$

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2(y) dy \text{ – вокруг оси } Oy.$$

4. Длина кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

2.2 Варианты Расчетно-графической работы по теме «Определённый интеграл и его приложения»

Задача № 1. Вычислить указанные определённые интегралы.

Вариант 0.

$$1. \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}}; \quad 2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx; \quad 3. \int_1^2 x \cdot \ln x dx; \quad 4. \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{15}} \frac{dx}{5+x^2}.$$

Вариант 1.

$$1. \int_3^4 \sqrt{3x-7} dx; \quad 2. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad 3. \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx; \quad 4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Вариант 2.

$$1. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}; \quad 2. \int_0^1 e^x \cdot \sin(e^x) dx; \quad 3. \int_1^3 \ln x dx; \quad 4. \int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}.$$

Вариант 3.

$$1. \int_1^3 \sqrt{4x-3} dx; \quad 2. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \cdot \sqrt{1-x^2}}; \quad 3. \int_{-1}^0 \frac{x}{2} \cdot e^{3x^2-2} dx; \quad 4. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$$

Вариант 4.

$$1. \int_1^2 \frac{dx}{3x-2}; \quad 2. \int_1^e x^3 \ln x dx; \quad 3. \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{x^3+3} dx; \quad 4. \int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

Вариант 5.

$$1. \int_{-3}^{-1} \left(3 - \frac{x}{3}\right) dx; \quad 2. \int_{\pi}^{2\pi} (5x+5) \sin 3x dx; \quad 3. \int_2^5 \frac{x^5}{7-2x^6} dx; \quad 4. \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Вариант 6.

$$1. \int_0^2 \frac{dx}{(1+2x)^2}; \quad 2. \int_0^2 (x-5) \cdot \ln 5x dx; \quad 3. \int_0^1 x^2 \cdot e^{1+x^3} dx; \quad 4. \int_0^{1/3} \frac{dx}{1+9x^2}.$$

Вариант 7.

$$1. \int_{-1}^0 \frac{dx}{(6x-5)^3}; \quad 2. \int_{-2}^0 (x+2) \cdot e^{3x} dx; \quad 3. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x dx; \quad 4. \int_0^3 e^{\frac{x+1}{3}} dx.$$

Вариант 8.

$$1. \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right) dx; \quad 2. \int_1^2 x^4 \cdot e^{4-5x^5} dx; \quad 3. \int_0^{\pi/2} (9x+5) \cos 2x dx; \quad 4. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 3x}.$$

Вариант 9.

$$1. \int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x} dx; \quad 2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx; \quad 3. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx; \quad 4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Задача № 2. Построить фигуру, ограниченную заданными линиями, и вычислить её площадь.

Вариант 0. а) $y = x^2 - x - 1$; $y = x + 2$.

б) $y = \operatorname{ctg} x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$;

Вариант 1. а) $y = x^2 + 6x + 4$; $y = 2x + 1$.

б) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

Вариант 2. а) $y = x^2 + 3x + 1$; $y = 2x + 3$.

б) $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$.

Вариант 3. а) $y = x^2 - 4x + 9$; $y = x + 3$.

б) $y = \frac{3x + 4}{x - 2}$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$.

Вариант 4. а) $y = x^2 + 4x - 5$; $y = 3x + 1$.

б) $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$ ($x > 0, y > 0$).

Вариант 5. а) $y = x^2 - 2x + 9$; $y = 4x + 1$.

б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 2$.

Вариант 6. а) $y = x^2 + 7x + 3$; $y = x - 5$.

б) $y = x^2$, $xy = 1$, $y = 4$.

Вариант 7. а) $y = x^2 - 5x + 17$; $y = 2x + 5$.

б) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 8. а) $y = x^2 + 11x + 9$; $y = 4x - 3$.

б) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $2y = x^2$.

Вариант 9. а) $y = x^2 - 2x + 3$; $y = x + 1$.

б) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

Задача № 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах.

Вариант 0. $\rho = 2 - 2 \cos \varphi$;

Вариант 1. $\rho = 1 + \sin 2\varphi$;

Вариант 2. $\rho = 1 + \cos 2\varphi$;

Вариант 3. $\rho = 2 - \cos \varphi$;

Вариант 4. $\rho = 1 - \sin 2\varphi$;

Вариант 5. $\rho = 1 + \cos \varphi$;

Вариант 6. $\rho = 1 - \cos 2\varphi$;

Вариант 7. $\rho = 1 - \sin \varphi$;

Вариант 8. $\rho = 2 + \sin \varphi$;

Вариант 9. $\rho = 2 - 2 \sin \varphi$;

Задача № 4. Вычислить объём тела, получающегося при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых заданы.

Вариант 0. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$.

Вариант 1. $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$.

Вариант 2. $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Вариант 3. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0$.

Вариант 4. $y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 5. $y = \frac{8}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 8$.

Вариант 6. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 7. $y = \frac{1}{6}x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$.

Вариант 8. $y = \operatorname{ctg} x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 9. $y = 4x - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$.

Задача № 5. Найдите длину дуги линии.

Вариант 0. $y = 15 - \ln(\sin x), \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

Вариант 1. $x^2 + y^2 = 9.$

Вариант 2. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{15}{16}.$

Вариант 3. $y = 1 - \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

Вариант 4. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$

Вариант 5. $y^2 = x^3, \quad 0 \leq x \leq 4.$

Вариант 6. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$

Вариант 7. $y = \frac{2}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3},$ между точками пересечения с осью

$Ox.$

Вариант 8. $y^2 = (x + 1)^3, \quad 1 \leq x \leq 2.$

Вариант 9. $y = 3 + \ln(\cos x), \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$

Задача № 6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл.

Вариант 0. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}.$

Вариант 1. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4 + x^2}.$

Вариант 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$

Вариант 3. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4}.$

Вариант 4. $\int_0^1 \frac{dx}{x}.$

Вариант 5. $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx.$

Вариант 6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$

Вариант 7. $\int_0^e \frac{\ln x dx}{x}.$

$$\text{Вариант 8. } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Вариант 9. } \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}.$$

Задача № 7. Вычислить приближённо определённый интеграл с помощью формулы прямоугольников, формулы трапеций и формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на n частей. Все вычисления производить с точностью до 0,001.

$$\text{Вариант 0. } \int_0^8 \sqrt[4]{1+x^3} dx, n=8.$$

$$\text{Вариант 1. } \int_0^1 \sqrt{4+x^3} dx, n=10.$$

$$\text{Вариант 2. } \int_{-1}^9 \sqrt{16+x^2} dx, n=10.$$

$$\text{Вариант 3. } \int_{-4}^4 \sqrt[4]{64-x^3} dx, n=8.$$

$$\text{Вариант 4. } \int_{-6}^2 \sqrt[4]{8-x^3} dx, n=8.$$

$$\text{Вариант 5. } \int_0^1 \sqrt{9+x^3} dx, n=10.$$

$$\text{Вариант 6. } \int_0^{10} \sqrt{18+x^2} dx, n=10.$$

$$\text{Вариант 7. } \int_{-3}^5 \sqrt[4]{27+x^3} dx, n=8.$$

$$\text{Вариант 8. } \int_{-8}^0 \sqrt[4]{1-x^3} dx, n=8.$$

$$\text{Вариант 9. } \int_{-5}^3 \sqrt[4]{27-x^2} dx, n=8.$$

2.3. Образец решения РГР.

Задача № 1. Вычислить указанные определённые интегралы.

$$1. \int_1^2 \frac{dx}{(7-3x)^3}.$$

Пользуясь правилом $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$,

табличным интегралом 1) и формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(7-3x)^3} = \int_1^2 (7-3x)^{-3} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(7-3x)^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = \frac{1}{6(7-3x)^2} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{6(7-3 \cdot 2)^2} - \frac{1}{6(7-3 \cdot 1)^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 4^2} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{32}.$$

2. $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ u = x \quad dv = \cos 2x dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - 0 + \frac{1}{4} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{\pi - 2}{8}.$$

3. $\int_1^e \frac{\ln^3 x dx}{x}$. Пользуясь формулой замены переменной в определённом

интеграле и учитывая, что $\ln 1 = 0$ и $\ln e = 1$, получаем:

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x dx}{x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}.$$

4. $\int_9^{12} e^{4-\frac{x}{3}} dx =$

$$-3 \cdot e^{4-\frac{x}{3}} \Big|_9^{12} = -3(e^{4-4} - e^{4-3}) = -3(e^0 - e^1) = -3(1 - e) = 3(e - 1).$$

При вычислении интеграла воспользовались 3-им правилом интегрирования и табличным интегралом 4).

Задача № 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 3x - 5; \quad y = x - 2.$$

Найдём абсциссы точек пересечения графиков, заданных функций. Для этого объединим уравнения в систему

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 5, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = 1.$$

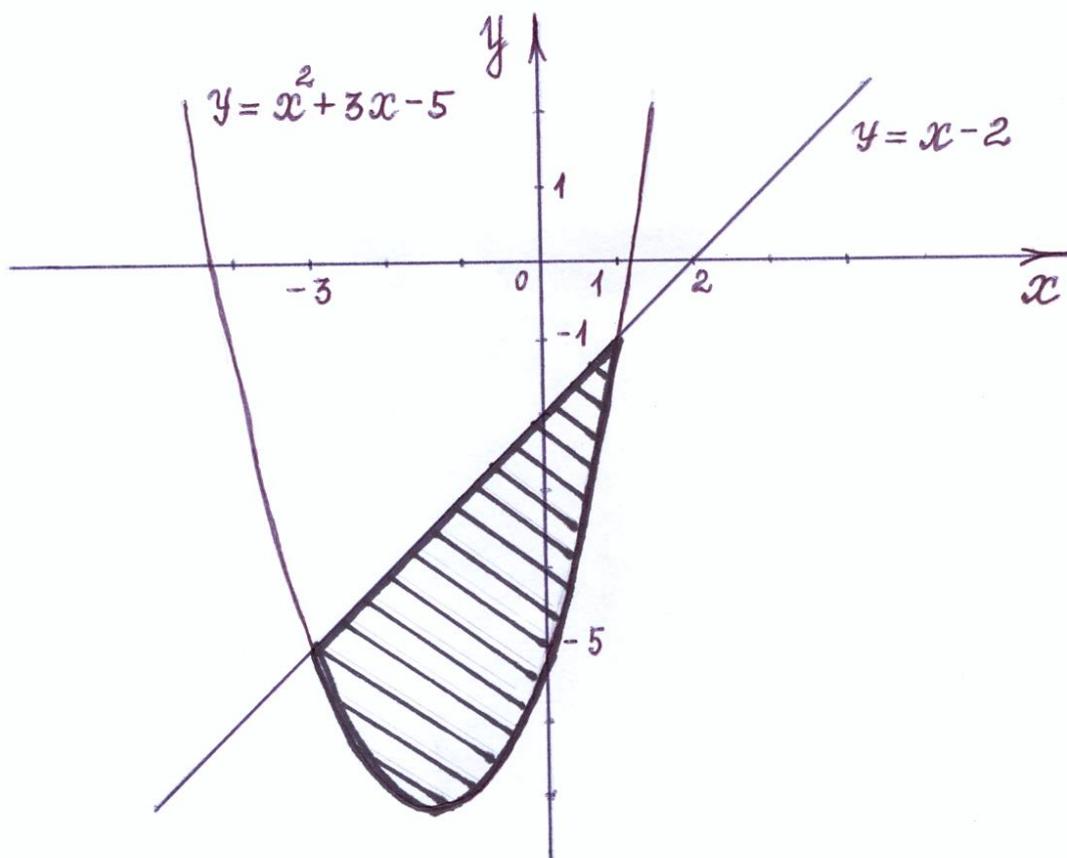


Рис.1.

После построения графиков заданных функций получим фигуру (рис.1), ограниченную прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 + 3x - 5$.

Площадь фигуры, изображённой на рис.1, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx,$$

где $f_2(x) = x - 2$, $f_1(x) = x^2 + 3x - 5$, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 (x - 2 - x^2 - 3x + 5) dx = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right) = -\frac{1}{3} + 2 - 9 + 9 + 9 = 10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Задача № 4. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \quad x = 6.$$

Первое уравнение задаёт гиперболу, а уравнение $x = 6$ задаёт вертикальную прямую. После их построения, получаем фигуру, ограниченную гиперболой и вертикальной прямой.

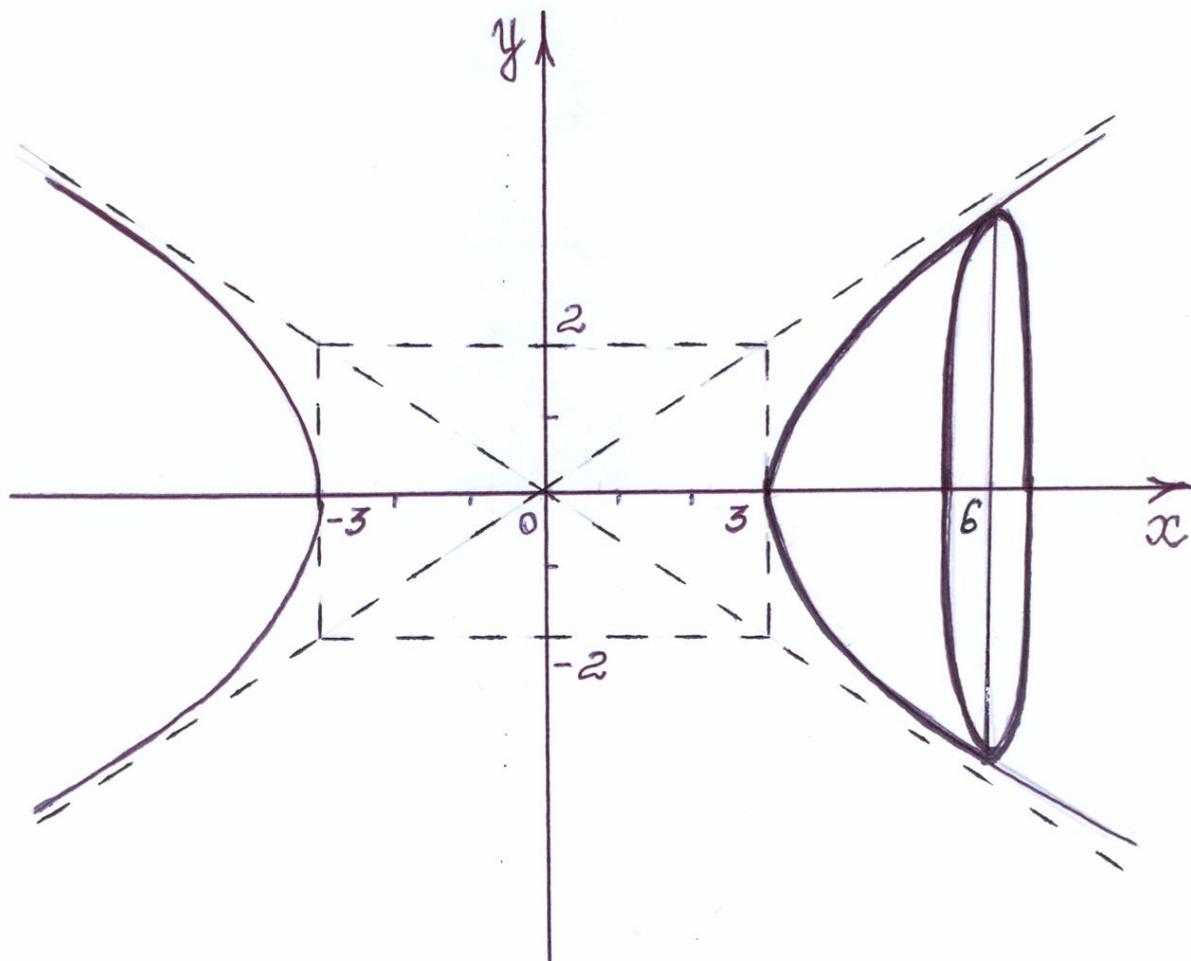


Рис.2.

Пользуясь формулой для вычисления объёма тела вращения

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

находим объём тела (рис.2), образованного вращением нашей фигуры вокруг оси Ox :

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_3^6 \left(\frac{4}{9} x^2 - 4 \right) dx = \pi \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_3^6 = \pi \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{6^3}{3} - 4 \cdot 6 \right) - \\ &\quad - \pi \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3 \right) = 8\pi + 8\pi = 16\pi \text{ (куб. ед.)} \end{aligned}$$

Задача № 7. Вычислить приближённо определённый интеграл с помощью формулы прямоугольников, формулы трапеций и формулы

Симпсона, разбив отрезок интегрирования на n частей. Все вычисления производить с точностью до 0,001.

$$\int_{-2}^6 \sqrt[4]{9+x^2} dx, \quad n=8.$$

Разобьём отрезок интегрирования $[-2;6]$ на 8 равных частей с шагом $h = \frac{6-(-2)}{8} = 1$ точками $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3, x_6 = 4, x_7 = 5, x_8 = 6$.

Вычислим значения функции $y = \sqrt[4]{9+x^2}$ в этих точках:
 $y_i = y(x_i), \quad i = \overline{0;8}$. Запишем результаты вычислений в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,899	1,778	1,732	1,778	1,899	2,060	2,236	2,415	2,590

Запишем формулы приближённого вычисления интеграла для случая разбиения отрезка интегрирования на 8 частей.

Формулы прямоугольников:

$$\int_a^b y(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_7),$$

$$\int_a^b y(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_8).$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_7 \right).$$

Формула Симпсона:

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[(y_0 + y_8) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) \right].$$

Проведя вычисления по этим формулам, получим, что приближённое значение интеграла по формулам прямоугольников равно 15,797 или 18,387; по формуле трапеций равно 16,142, а по формуле Симпсона равно 16,116.

Вопросы для защиты РГР

- 1.** Что такое интегральная сумма и в чем заключается ее геометрический смысл?
- 2.** Сформулируйте определение определенного интеграла.
- 3.** Какие функции являются интегрируемыми?
- 4.** Чему равен определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами интегрирования?
- 5.** Как изменится значение определенного интеграла, если поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования?
- 6.** Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
- 7.** Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
- 8.** Как с помощью определенного интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции?
- 9.** Как найти объем тела вращения?
- 10.** как найти длину дуги кривой?

3. РГР № 3 «Случайные величины и их числовые характеристики»

3.1. Теоретический материал

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Приведем некоторые примеры случайных величин.

1) Число очков, выпадающих на игральной кости. Эта величина может принимать одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

3) Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a , b).

Случайные величины в дальнейшем будем обозначать большими буквами X , Y , Z а их возможные значения – соответственно строчными буквами x , y , z . Например, X – число попаданий при трех выстрелах. Возможные значения этой случайной величины: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Случайная величина называется *дискретной*, если её возможные значения есть отдельные изолированные числа (т. е. между двумя соседними возможными значениями нет других значений). Дискретная случайная величина принимает эти значения с определенными вероятностями.

Из приведенных выше случайных величин дискретными являются случайные величины примеров 1, 2.

Бывают случайные величины, которые принимают значения из некоторого интервала.

К таким величинам относится случайная величина примера 3.

Чтобы охарактеризовать дискретную случайную величину X , следует указать её возможные значения x_1, x_2, \dots, x_n и вероятности событий, состоящих в том, что случайная величина X приняла значение x_i :

$$p_i = P(X = x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В результате испытания произойдет только одно из полной группы событий: $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$. Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными её значениями и их вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения удобно записывать в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i , а вторая – их вероятности p_i :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Эта таблица называется **рядом распределения**.

Пусть x – некоторое действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньше x , обозначим через $F(x)$, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция $F(x)$ называется **функцией распределения** случайной величины X .

Случайная величина называется **непрерывной**, если её функция распределения непрерывна и кусочно-дифференцируема.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна, т. е.

$$f(x) \geq 0.$$

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Для решения многих практических задач совсем необязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные числовые параметры, которые позволяют отразить существенные особенности случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox , определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий этих величин:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Если X является **дискретной** случайной величиной, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i$$

$$\text{или } D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (M(X))^2.$$

Для **непрерывной** случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

$$\text{или } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

3.2. Варианты РГР

Вариант № 0

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	1	3	5	7
P	0,2	0,5	0,2	p

Y	2	6
P	0,7	0,3

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -4, \\ A(x+4) & \text{при } -4 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;

- 2) Вычислить $P(0 < X < 1)$;
 - 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
 - 4) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
- Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Имеется три ключа, среди которых только один подходит к замку. Составьте ряд распределения числа попыток, которые потребуются для открывания двери. Найдите числовые характеристики. Какова вероятность того, что попыток будет не более одной?

Вариант № 1

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	2	3	4	5
P	0,1	0,6	p	0,2

Y	-2	2
P	0,3	0,7

Найти:

- 1) p;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2X - Y$.

№ 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{25}(x+1)^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность $P(1 < X < 2)$;
 - 2) плотность вероятности $f(x)$;
 - 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
- Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Спортсмен должен последовательно преодолеть 2 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью 0,9. Если спортсмен не преодолевает препятствие, то он выбывает из соревнований. Построить ряд распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение числа препятствий, преодоленных спортсменом. Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет не более одного препятствия.

Вариант № 2

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-1	1	3	5
P	0,1	p	0,2	0,5

Y	1	3
P	0,8	0,2

Найти:

- 1) p;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=3X+2Y$.

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ A(4-x) & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;
- 2) Вычислить $P(0 < X < 1)$;
- 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
- 4) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
- 5) Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить ряд распределения числа библиотек, которые посетит студент в поисках книги, если в городе три библиотеки имеют такую книгу. Найти числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что студент посетит не более двух библиотек?

Вариант № 3

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-2	1	4	5
P	p	0,5	0,2	0,1

Y	-1	3
P	0,4	0,6

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=3Y-2X$.

№ 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность $P\left(-1 < X < \frac{1}{2}\right)$;
 - 2) плотность вероятности $f(x)$;
 - 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
- Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Автоматизированную линию обслуживают три манипулятора. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3. Построить ряд распределения, найти числовые характеристики числа манипуляторов, проверенных до остановки линии. Какова вероятность того, что проверят более одного манипулятора?

Вариант № 4

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-3	-2	2	1
P	0,2	p	0,1	0,6

Y	1	4
P	0,9	0,1

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2Y-X$.

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ Ax^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;
- 2) Вычислить $P(X < 2)$;
- 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
- 4) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
- 5) Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Экзаменатор задает студенту не более трех дополнительных вопросов. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзаменовать студента, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Составить ряд распределения случайной величины – числа дополнительных вопросов, заданных студенту. Найти ее числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что дополнительных вопросов будет не более двух?

Вариант № 5

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-1	2	4	6
P	0,2	0,5	0,2	p

Y	1	5
P	0,8	0,2

Найти:

- 1) p;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2X-Y$.

№ 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{1}{2}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность $P(0 < X < 1)$;
- 2) плотность вероятности $f(x)$;
- 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Имея три патрона, стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Составить ряд распределения числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность того, что стрелок сделает не более двух выстрелов?

Вариант № 6

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	1	3	5	7
P	1/6	1/4	1/3	p

Y	-2	1
P	0,7	0,3

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=3Y-3X$.

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{A}{x^3} & \text{при } 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;
- 2) Вычислить $P(3 < X < 5)$;
- 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
- 4) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
- 5) Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Испытывают три прибора на надежность. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,6. Каждый следующий прибор

испытывают только, если предыдущий выдержал испытание. Составьте ряд распределения числа испытанных приборов. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что будет проверено не более двух приборов?

Вариант № 7

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	1	2	3	6
P	0,2	0,1	0,4	p

Y	1	2
P	0,7	0,3

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=3Y-4X$.

№ 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

- 1) Вероятность $P\left(\frac{1}{3} < X < 2\right)$;
- 2) плотность вероятности $f(x)$;
- 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Для проверки на качество ОТК берет из партии не более трех деталей. При обнаружении нестандартной детали вся партия задерживается. Составить ряд

распределения числа подвергшихся проверке деталей, найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность того, что проверят не менее двух деталей?

Вариант № 8

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-1	1	3	4
P	0,2	0,4	0,2	p

Y	2	5
P	0,8	0,2

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2X-3Y$.

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{A}{x} & \text{при } 1 \leq x \leq e, \\ 0 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;
- 2) Вычислить $P(\frac{e}{2} < X < \frac{3}{4}e)$;
- 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
- 4) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
- 5) Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Для первого студента вероятность успешно сдать экзамен – 0,8, для второго – 0,2. Составьте ряд распределения числа студентов, успешно сдавших экзамен. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что хотя бы один из студентов успешно сдаст экзамен?

Вариант № 9

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	1	2	3	6
P	0,4	0,2	p	0,3

Y	2	4
P	$2/3$	$1/3$

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=4X+3Y$.

№ 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти:

- 1) вероятность $P(1 < X < 2)$;
- 2) плотность вероятности $f(x)$;
- 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

№ 3. Некто владеет двумя акциями. Первая акция является доходной с вероятностью 0,2, вторая – с вероятностью 0,5. Составьте ряд распределения числа акций, приносящих доход. Найдите числовые характеристики. Какова вероятность того, что доходных акций не менее одной?

3.3. Образец решения РГР

№ 1. Независимые случайные дискретные величины X , Y заданы законами распределения.

X	-6	-3	1	2
P	0,4	0,3	p	0,1

Y	-2	8
P	0,2	0,8

Найти:

- 1) p ;
- 2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
- 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2X-4Y$.

Решение.

1) В результате опыта случайная величина X примет только одно из возможных значений $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, т. е. произойдет только одно из полной группы событий. Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то

$$0,4+0,3+p+0,1=1.$$

Следовательно, $p=1-0,4-0,3-0,1=0,2$.

Таким образом, ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	-6	-3	1	2
P	0,4	0,3	0,2	0,1

2) Найдем функцию распределения $F(X)$.

Если $x \leq -6$, то $F(x)=0$.

Действительно, значений, меньших числа -6 , величина X не принимает.

Следовательно, при $x \leq -6$ функция $F(x)=P(X < x)=0$.

Если $-6 < x \leq -3$, то $F(x)=0,4$.

Действительно, X может принимать значение -6 с вероятностью 0,4.

Если $-3 < x \leq 1$, то $F(x)=0,7$.

Действительно, X может принимать значение -6 с вероятностью 0,4 и значение -3 с вероятностью 0,3; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,4+0,3=0,7$.

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x)=0,9$.

Действительно, X может принимать значение -6 с вероятностью $0,4$, значение -3 с вероятностью $0,3$, значение 1 с вероятностью $0,2$; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять с вероятностью $0,4+0,3+0,2=0,9$.

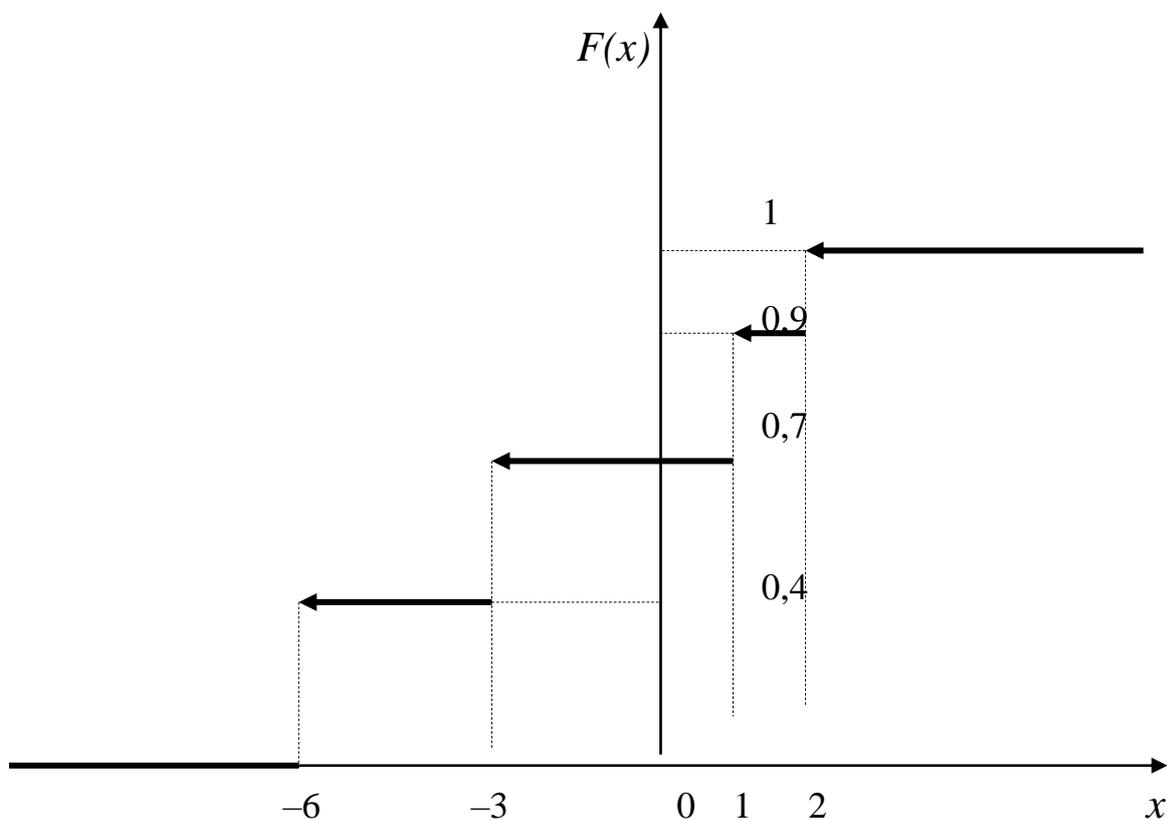
Если $x > 2$, то $F(x)=1$.

Действительно, событие $X \leq 2$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -6, \\ 0,4 & \text{при } -6 < x \leq -3, \\ 0,7 & \text{при } -3 < x \leq 1, \\ 0,9 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке.



3) Найдем математическое ожидание случайных величин X, Y .

$$M(X) = (-6) \cdot 0,4 + (-3) \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = -2,9 ;$$

$$M(Y) = (-2) \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,8 = 6 .$$

Используя свойства математического, получим

$$M(Z) = M(2X - 4Y) = 2M(X) - 4M(Y) = 2 \cdot (-2,9) - 4 \cdot 6 = -29,8$$

Найдем дисперсии случайных величин X, Y .

$$D(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - (M(X))^2 =$$

$$= (-6)^2 \cdot 0,4 + (-3)^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,1 - (-2,9)^2 = 138,89 ;$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^2 y_i^2 p_i - (M(Y))^2 = (-2)^2 \cdot 0,2 + (8)^2 \cdot 0,8 - 6^2 = 16 .$$

Так как величины X и Y независимы, то независимы также и величины $2X$ и $4Y$. Используя свойства дисперсии, получим

$$D(Z) = D(2X - 4Y) = 4D(X) + 16D(Y) = 4 \cdot 138,89 + 16 \cdot 16 = 811,56 .$$

№ 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ A(x+3) & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

- 1) Найти A ;
- 2) Вычислить $P(-4 < X < -2)$;
- 3) Найти функцию $F(x)$ распределения вероятности;
- 4) Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

1) Для нахождения параметра A воспользуемся свойством плотности

распределения вероятностей: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dx + \int_{-3}^0 A(x+3) dx + \int_0^{\infty} 0 \cdot dx = A \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-3}^0 = \\ &= -A \left(\frac{9}{2} - 9 \right) = \frac{9}{2} A = 1. \end{aligned}$$

Отсюда находим $A = \frac{2}{9}$.

Тогда функцию плотности распределения можно записать следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{2}{9}(x+3) & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

2) Воспользуемся формулой $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

$$P(-4 < X < -2) = \int_{-4}^{-2} f(x) dx = \int_{-4}^{-3} 0 \cdot dx + \int_{-3}^{-2} \frac{2}{9}(x+3) dx = \frac{1}{9}(x+3)^2 \Big|_{-3}^{-2} = \frac{1}{9}.$$

3) Для нахождения функции распределения, используем формулу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Если $x \leq -3$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0$.

Если $-3 < x \leq 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int_{-3}^x \frac{2}{9}(t+3)dt = \frac{1}{9}(x+3)^2.$$

Если $x > 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int_{-3}^0 \frac{2}{9}(t+3)dt + \int_0^x 0 \cdot dt = 1.$$

Итак, искомая функция распределения

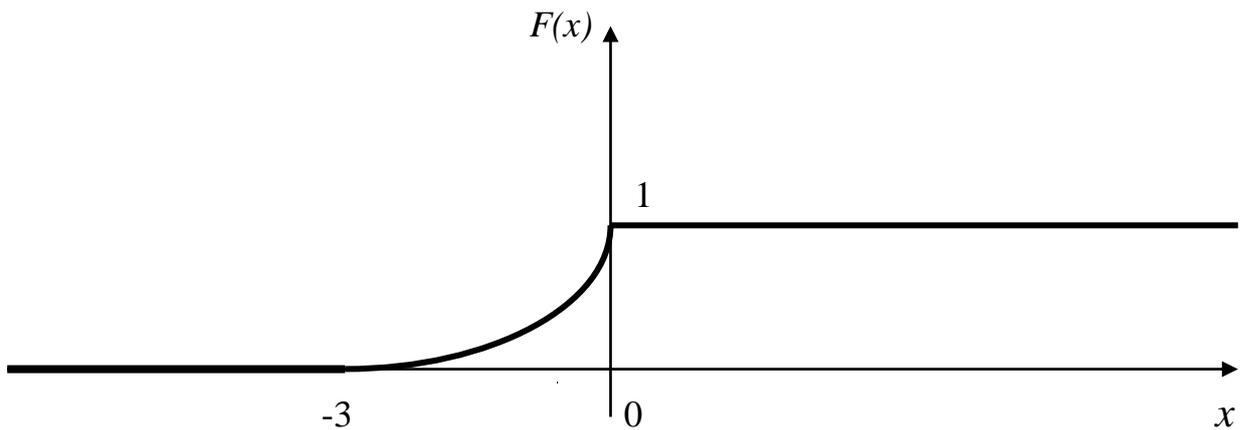
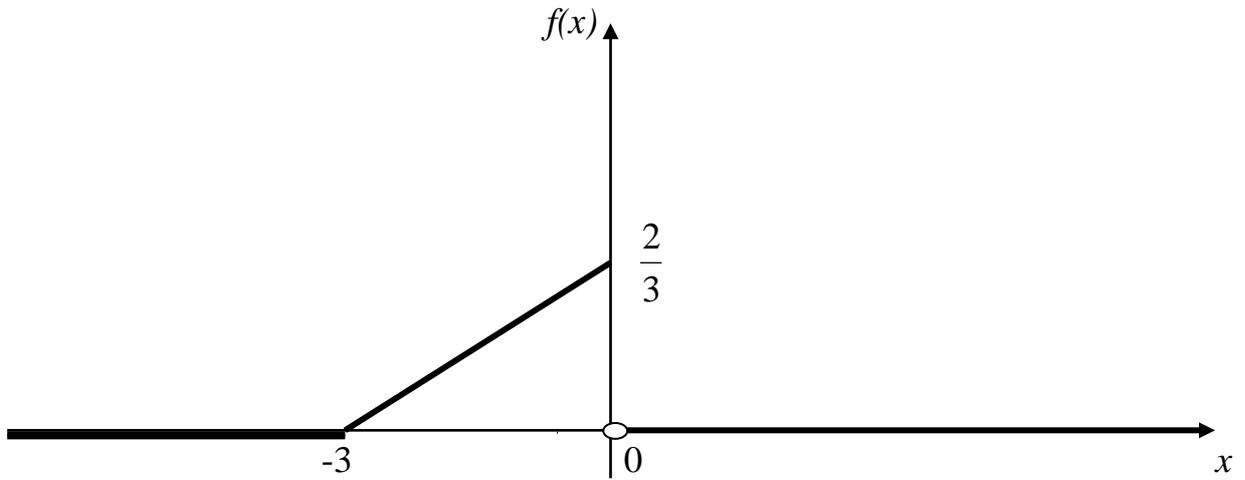
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

4) Вычислим числовые характеристики случайной величины X .

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{-3} x \cdot 0 dx + \int_{-3}^0 x \cdot \frac{2}{9}(x+3) dx + \int_0^{\infty} x \cdot 0 dx = \\ &= \frac{2}{9} \int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx = \frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x^2 \cdot 0 dx + \int_{-3}^0 x^2 \cdot \frac{2}{9}(x+3) dx + \int_0^{\infty} x^2 \cdot 0 dx = \frac{2}{9} \int_{-3}^0 (x^3 + 3x^2) dx = \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_{-3}^0 = 1,5. \end{aligned}$$

5) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



№ 3. В рейс выделено 3 автобуса. Вероятность того, что во время рейса автобус будет работать без поломок, равна 0,9. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа автобусов, работающих без поломок в течение рейса. Найти числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что более одного автобуса будут работать безотказно?

Решение. Дискретная случайная величина X (число автобусов, работающих без поломок в течение рейса) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Автобусы работают независимо один от другого, вероятности безотказной работы каждого автобуса равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, $n=3$, $p=0,9$, $q=1-p=0,1$, получим:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = (0,1)^3 = 0,001, \\ P(X=1) &= P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot (0,9)^1 \cdot (0,1)^2 = 0,027, \\ P(X=2) &= P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^1 = 0,243, \\ P(X=3) &= P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = (0,9)^3 = 0,729. \end{aligned}$$

Контроль: $0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1$.

Напишем искомый ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Найдем числовые характеристики случайной величины **X**.

$$M(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,027 + 2 \cdot 0,243 + 3 \cdot 0,729 = 2,7;$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = \\ &= 0 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,027 + 4 \cdot 0,243 + 9 \cdot 0,729 - (2,7)^2 = 0,27; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,27} \approx 0,52.$$

Пусть событие **B** - более одного автобуса будут работать безотказно, т. е. или два, или три автобуса.

$$P(B) = P(X=2) + P(X=3) = 0,243 + 0,729 = 0,972.$$

Библиографический список

Основная литература

1. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 [Электронный ресурс] : учеб. для вузов / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2020. – 248 с. – (Высшее образование). – ЭБС «Юрайт».
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 [Электронный ресурс] : учеб. для вузов / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2020. – 305 с. – (Высшее образование). – ЭБС «Юрайт».
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М. : Издательство Юрайт, 2020. – 479 с. – (Высшее образование). – ЭБС «Юрайт»